

5

Интеграл Лебега от простых функций от ограниченных и неограниченных функций (X, Σ, μ)

Введем $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ — хар. ф-ция. Тогда
опр., $\int$ Лебега = $\int_X \chi_A(x) d\mu = \mu(A)$

Простые ф-ции — ф-ции с конеч. числом знач-ий
т.е. $f(x) = \sum_{k=1}^m f_k \chi_{A_k}(x)$, $A_k \in \Sigma$; $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$;
 $X = \bigcup_{j=1}^m A_j$; $f_k \in \mathbb{R}$

$\int$ -инт Лебега от прост. $f(x) = \sum_{k=1}^m f_k \chi_{A_k}(x)$ наз-ся
число $\int f(x) d\mu = \sum_{k=1}^m f_k \mu(A_k)$

Св-ва:

1) If f — простая, то $c \cdot f$ — простая, и $\int_X c f d\mu = c \int_X f d\mu$, $\forall c = \text{const}$

2) If f и g — простые, то $f \pm g$ — тоже простые,
и $\int_X (f(x) \pm g(x)) d\mu = \int_X f(x) d\mu \pm \int_X g(x) d\mu$ $\blacktriangle \blacksquare$ (по опр.)

Важно! Отметим, что $f \cdot g$ и f/g — тоже простые

Лемма If f, g — простые $\Rightarrow \int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$

3) If f — прост., то $|\int_X f(x) d\mu| \leq \max |f(x)| \mu(X)$
 $\blacktriangle \blacksquare$ (по опр.)

Лемма If $f_n(x)$ — посл-ть прост. ф-ций, $f_n(x) \xrightarrow{x} f(x)$,
то $\int_X f_n(x) d\mu$ тоже сх-ся к нек-т. числу

$\blacktriangle |\int_X f_n(x) d\mu - \int_X f_m(x) d\mu| = |\int_X (f_n(x) - f_m(x)) d\mu| \leq \max |f_n(x) - f_m(x)| \mu(X) \leq \epsilon \mu(X)$, $\forall n, m \geq N$. Посл-ть
чисел функ. $\Rightarrow$ сх-ся $\blacksquare$

$\exists f(x)$ — равномер. $\lim$ на X прост. ф-ций $f_n(x)$. Тогда

$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu$ — **Лемма по опр.**

Важно! If $f_n(x) \xrightarrow{x} f(x)$, $\tilde{f}_n(x) \xrightarrow{x} f(x)$ ($f_n, \tilde{f}_n$ — простые),
то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \tilde{f}_n(x) d\mu$ $\blacktriangle \blacksquare$

А на какой класс мы расширили стр-е? Пр-ел измеримых — измерим $\Rightarrow f(x)$ непрерывна, кроме того $f(x)$ стр.: $|f| \leq f_n < \varepsilon, \forall n \geq N, \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon, |f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon, f(x) \leq \max |f_n(x)| + \varepsilon$.

Лемма $f(x)$ измер. и стр. Тогда $\exists$ прост. $f_n(x)$:

$$\blacktriangle f(x) = \frac{f_n(x) + f(x)}{2} - \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = f_+(x) - f_-(x),$$

примем $f_+, f_- \geq 0$ и измер. будем аппроксимировать f , считая, что она неотриц. измерима и стр.: $0 \leq f(x) \leq M$. Положим $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} = A_{kn}, k=0,1,\dots,n \in \mathbb{N}$.

A_{kn} — измер., попарно непересекаются ($A_{kn} \cap A_{jn} = \emptyset$). Все-дем $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \chi_{A_{kn}}(x)$; тогда $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{n}$,

$\forall x \in A_{kn} \Rightarrow \forall x \in X$ ■

! зам If $f(x)$ не стр, то $\exists$ посл-ть прост. ф-ций, принимающих счетные числа значений: $f_n(x) \Rightarrow f(x)$

! ∇ измер. и стр. ф-ция интер-на по Лебелю

▲ лемма + ! зам ■

Случай неотр. ф-ций

$$\exists f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)} \chi_{A_i}(x), X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (A_i \cap A_j = \emptyset)$$

Прост. ф-ция $f(x)$ — **интер. по Лебелю**, if ск-ся под $\sum_{i=1}^{\infty} |f^{(i)}| \mu(A_i)$ и f -ном Лебега раз-ся число $\sum_{i=1}^{\infty} |f^{(i)}| \mu(A_i) \equiv \int_X f(x) d\mu$

И.о., абс. интер-ть $\Leftrightarrow$ интер-ти (?)

[Аналогичные же 2 св-ва ^{и лемма после них} из начала билета] (просто добавляется, что ф-ция прост., интер.)

3 (св-во) If $f(x)$ — прост. и интер., то $|\int_X f(x) d\mu| \leq \sup f(x) \mu(X)$